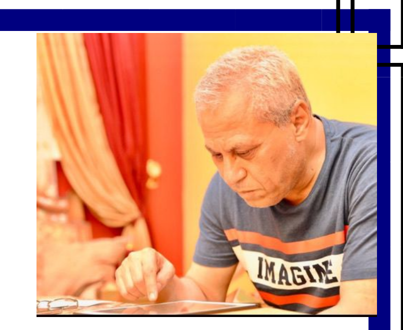


الرياضيات التطبيقية

للصف الثاني الثانوي العلمي

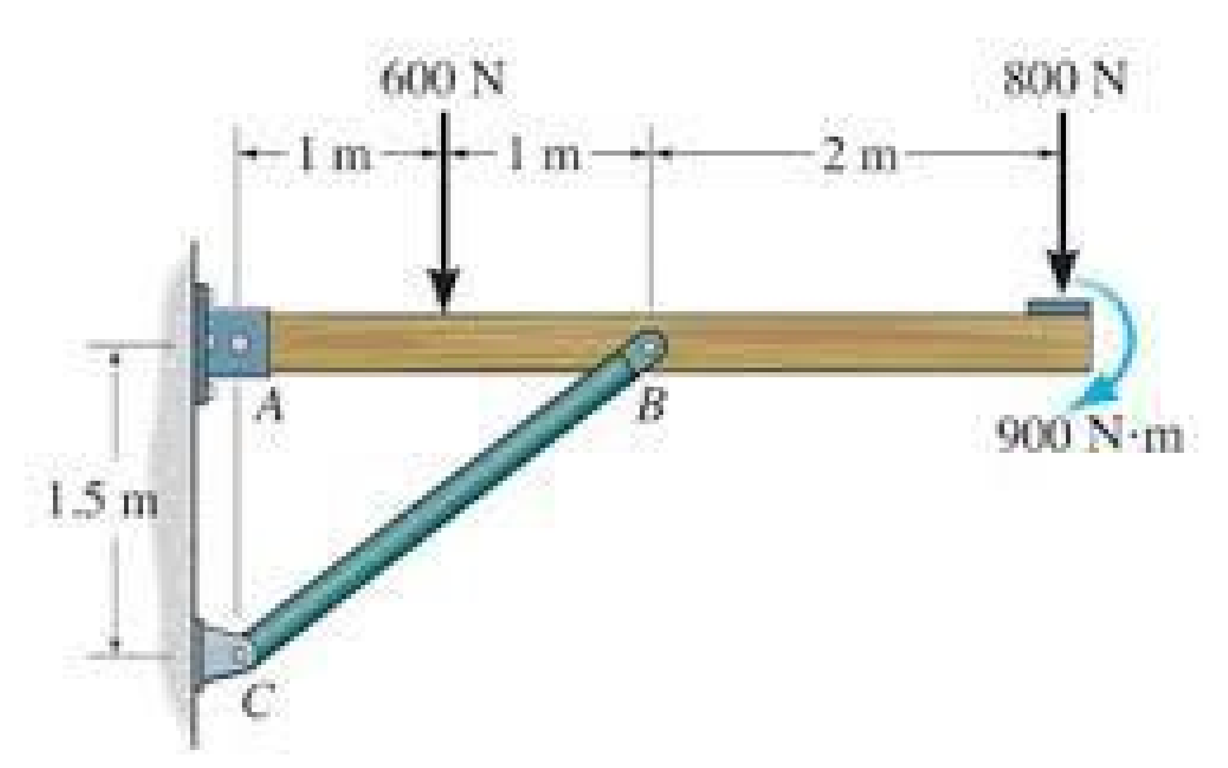
إعداد الأستاذ

السيد عبد الكريم عرابي

موجه رياضيات




الاستاتيكا


600 N
800 N
1 m
1 m
2 m
1.5 m
A
B
C
900 N·m


دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

القـــوى

القـــوة: القـوة هى مؤثر خارجى يعمل على تغيير حالة الجسم من السكون أو الحركة المنتظمة

أنواع القوى

① قوة الشد (ش) تظهر فى الخيط أو الحبل عند تعليق جسم فيه

② قـوة الوزن (و) تظهر عند إلقاء جسم فإنه يـسقط على الارض

③ قـوة الضغط (ض) تظهر عند وضع جسم على سطح

④ قـوة رد الفعل (ر) تظهر عند تلامس جسمين ببعض

متجه القـوة

القـوة كمية متجهة تحتاج لتعريفها مقدارها واتجاهها

$\vec{ق} = (س ، ص)$ ⟷ صورة إحداثية

$\vec{ق} = س\,\vec{س} + ص\,\vec{ص}$ ⟷ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

$\vec{ق} = (\|\vec{ق}\| ، \theta)$ ⟷ صورة قطبية

تعيين القوة

يتوقف تأثير القـوة على :-

(i) مقدارها (ii) اتجاهها (iii) نقطة تأثيرها (خط عملها)

وحدات القوة

(i) وحدات مطلقة: نيوتن – داين

(ii) وحدات تثاقلية: ث.طن – ث.كجم – ث.جم

المحصلة: هى قـوة بديلة تحدث نفس التأثير الذى تحدثه قوتين أو أكثر

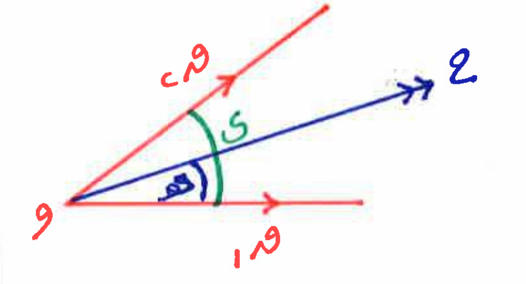
محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

١ إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة هندسيا

$\vec{ح} = \vec{ق_١} + \vec{ق_٢}$

إذا مثلت قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراً واتجاهاً بضلعى متوازى أضلاع يبدأ من النقطة. فإن محصلتهما تمثل مقداراً واتجاهاً بقطر متوازى الأضلاع الذى يبدأ بهذه النقطة

٢ إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليا



ق١ ، ق٢ ، ح مقادير القوى

ى قياس الزاوية بين القوتين

هـ قياس زاوية ميل المحصلة على ق١

مقدار المحصلة : $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتاى$

اتجاه المحصلة : $ظاهـ = \frac{ق_٢ جاى}{ق_٢ جتاى + ق_١}$

مثال ١ قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما .

الحل

ق١	ق٢	ح	ى	هـ
١٠	٦	؟؟	٦٠°	؟؟

$ح = \sqrt{(١٠)^٢ + (٦)^٢ + ٢ \times ١٠ \times ٦ جتا٦٠°} = ١٤$ نيوتن

$ظاهـ = \frac{٦ جا٦٠°}{٦ جتا٦٠° + ١٠} \Leftarrow هـ = ٢١° ٤٧َ ١٢ً$

مثال ٢ قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة فإذا كان مقدار محصلتهما $٤\sqrt{٣}$ نيوتن أوجد قياس الزاوية بينهما .

الحل

$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى

$(٤\sqrt{٣})^٢ = ١٦ + ٦٤ + ٢ \times ٤ \times ٨$ جتا ى

∴ $٤٨ = ٨٠ + ٦٤$ جتا ى

∴ ٦٤ جتا ى $= -٣٢$ ⟸ جتا ى $= \frac{-٣٢}{٦٤}$ ⟸ ى $= ١٢٠°$

$ق_١$	$ق_٢$	ح	ى	هـ
٤	٨	$٤\sqrt{٣}$	??	

مثال ٣ قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° إذا كانت محصلتهما $ق\sqrt{٣}$ ث.جم أوجد مقدار ق

الحل

$(ق\sqrt{٣})^٢ = ٦٤ + ق^٢ + ٢ \times ٨ \times ق$ جتا ١٢٠°

$٣ق^٢ = ٦٤ + ق^٢ - ٨ق$

$٣ق^٢ - ٦٤ - ق^٢ + ٨ق = ٠$

$٢ق^٢ + ٨ق - ٦٤ = ٠$

∴ ق = ٤ ث.كجم ، ق = −٨ مرفوض

$ق_١$	$ق_٢$	ح	ى	هـ
٨	ق	$ق\sqrt{٣}$	١٢٠°	

مثال ٤ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق

الحل

حالات خاصة

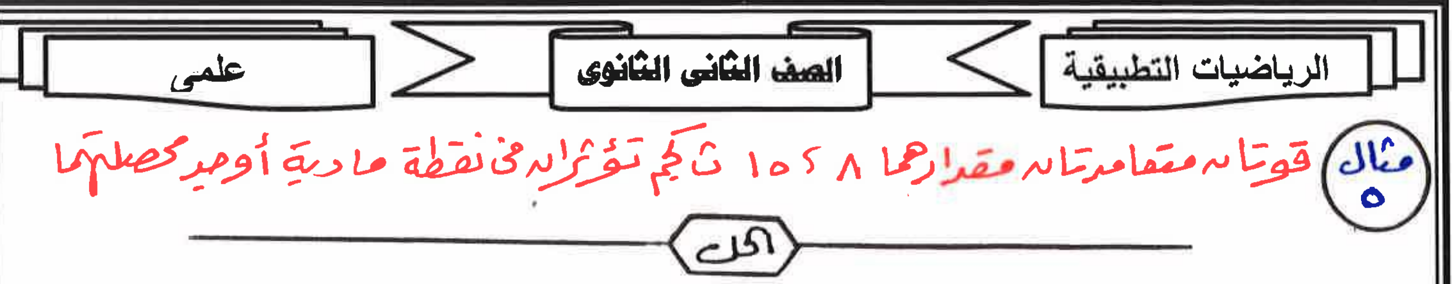
القوتان فى نفس الاتجاه	القوتان فى اتجاهين متضادين	القوتان متعامدتان
$ح = ق_1 + ق_2$ المحصلة لها قيمة عظمى	$ح = \lvert ق_1 - ق_2 \rvert$ المحصلة لها قيمة صغرى	$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2$
ى = صفر	ى = ١٨٠°	ى = ٩٠°
اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين	المحصلة فى اتجاه القوة الاكبر	$ظا هـ = \frac{ق_2}{ق_1}$

القوتان متساويتان	المحصلة عمودية على القوة الاولى	القوتان متساويتان ومتضادتان
$ح = 2ق \, جتا \frac{ى}{2}$ ح تنصف الزاوية بين القوتين	$ح^2 = ق_2^2 - ق_1^2$ $ق_1 + ق_2 \, جتا ى = صفر$ $جتا ى = \frac{ق_1}{ق_2}$ ح ⊥ القوة الصغرى دائماً	ح = صفر ى = ١٨٠°

ملحوظة

$$\lvert ق_1 - ق_2 \rvert \leq ح \leq ق_1 + ق_2$$

يعنى : $ح \in [\lvert ق_1 - ق_2 \rvert \, ، \, ق_1 + ق_2]$



مثال ٥
قوتان متعامدتان مقدارهما ٨ ، ١٥ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية أوجد محصلتهما

الحل

مثال ٦
قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كانت أكبر قيمة للمحصلة = ١٧ ث.كجم وأصغر قيمة للمحصلة = ٧ ث كجم أوجد مقدار كل من القوتين

الحل



قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى أوجد ق ومقدار المحصلة .

الحل

(١) إذا كانت $\overline{ق_١}$ = ٢ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = $\overline{س}$ + $\overline{ص}$ حيث ق١ ، ق٢ بالنيوتن فإن مقدار محصلتهما ----

(أ) $\sqrt{٢٦}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٢) قوتان مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما --- نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) $\sqrt{١٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

(٣) قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن محصلتهما = --- نيوتن

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٤) قوتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما نيوتن

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٣$\sqrt{٣}$

(٥) قوتان متساويتان متلاقيتان في نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٦) قوتان مقدارهما ٣ ، ق نيوتن ، قياس الزاوية بينهما ∈] ٠ ، π [ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن ق = نيوتن

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٣$\sqrt{٢}$

(٧) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٨) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق نيوتن ومقدار محصلتهما ق فإن قياس الزاوية بينهما --

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٨٠°

(٩) إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوى

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٠) إذا كانت ح محصلة القوتين ق١ ، ق٢ وكانت ح ⊥ ق١ وكانت ح = ½ ق٢ فإن قياس الزاوية بين القوتين ق١ ، ق٢ هو ..

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

(١١) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = . . .

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(١٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ق١ ، ق٢ حيث ٠ ≥ ق١ ≥ ١٣ ، ٨ ≥ ق٢ ≥ ١٧ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن ..

(أ) ٣ ≥ ح ≥ ٤ (ب) ٠ ≥ ح ≥ ٤

(جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٧ (د) ٥ ≤ ح ≤ ١٧

(١٣) قوتان متعامدتان مقدارهما ٢ ق – ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن ق =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٤) أثرت قوتان فى نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الاولى ١٥ ث جم وتؤثر فى اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث جم وتؤثر فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال عين المحصلة

(١٥) قوتان مقدارهما ق١ ، ق٢ نيوتن ومحصلتهما ح نيوتن حيث ح ∈ [٦ ، ١٠] ، ق١ > ق٢ أوجد مقدار ق١ ، ق٢

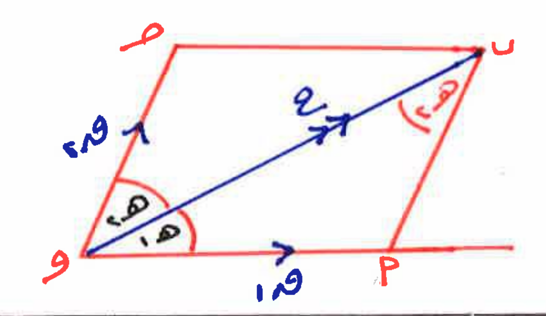
(١٦) قوتان مقدارهما ١٦ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الاولى بزاوية ٣٠° أوجد ق ومقدار المحصلة

ا/ السيد عبد الكريم

تحليل القوة إلى مركبتين

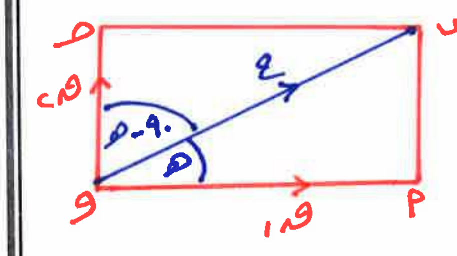
سبق أن أوجدنا محصلة قوتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ متلاقيتين فى نقطة مادية باستخدام قاعدة متوازى الأضلاع . والعكس اذا كان لدينا المحصلة $\overline{ح}$ والمطلوب تحليلها

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين



$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ح}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين



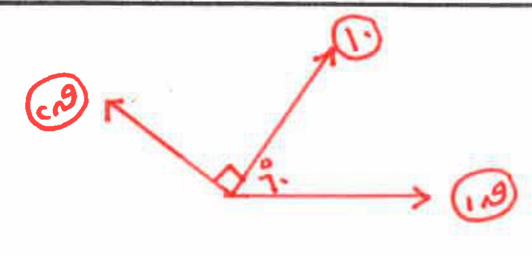
$$\frac{ق_1}{جا(٩٠ - هـ)} = \frac{ق_2}{جا هـ} = \frac{ح}{جا ٩٠}$$

∴ $ق_1 = ح \times جتا هـ$ $\qquad$ $ق_2 = ح جا هـ$

① فى الشكل المقابل..

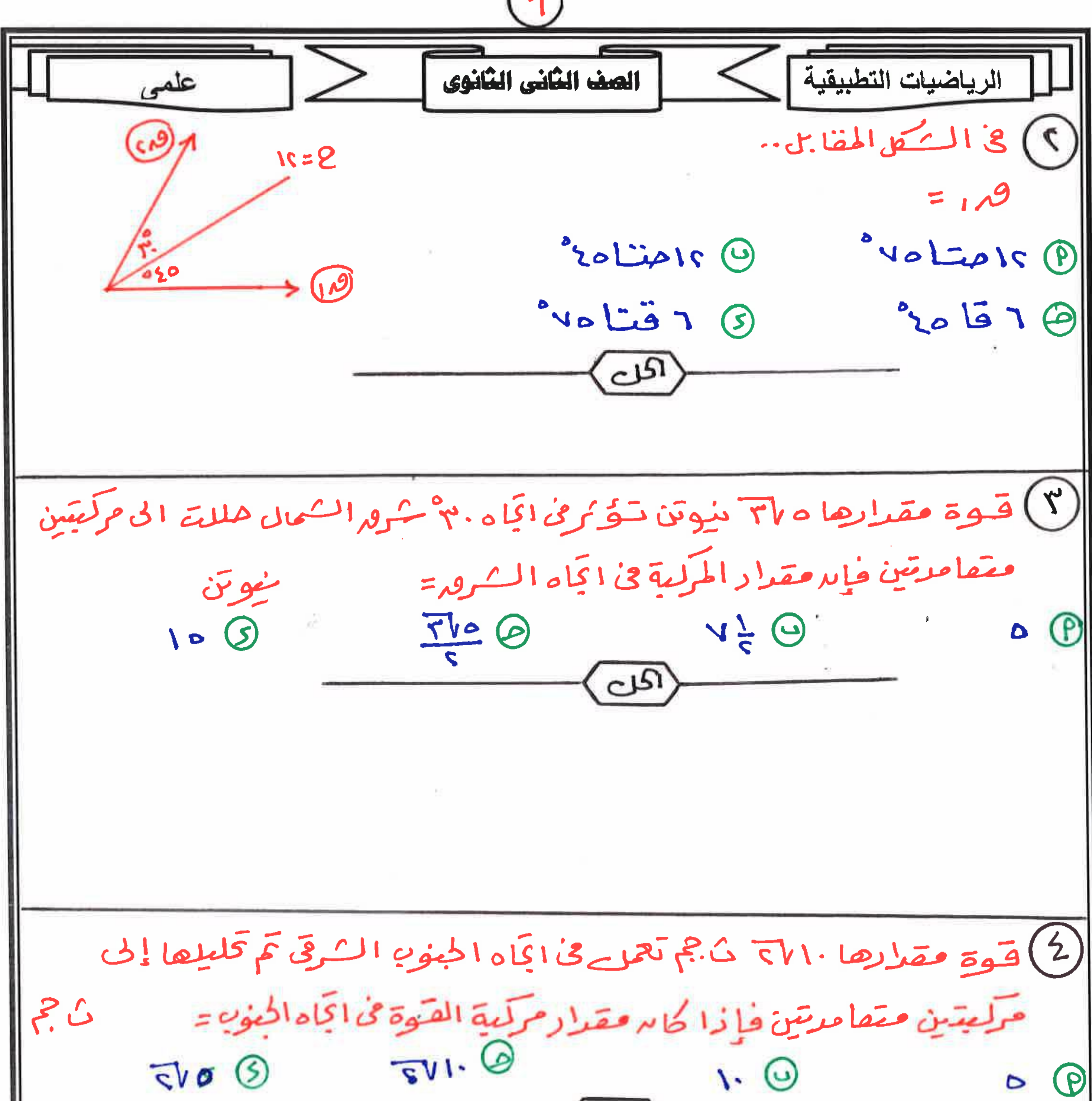
بتحليل القوة ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$

فإن : $ق_2 =$ .... نيوتن



(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

الحل



(٢) في الشكل المقابل ..

ق١ =

(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(ج) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قتا ٧٥°

الحل

---

(٣) قوة مقدارها ٥√٣ نيوتن تؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت الى مركبتين متعامدتين فإن مقدار المركبة في اتجاه الشرق = ... نيوتن

(أ) ٥ (ب) ٧ ½ (ج) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

الحل

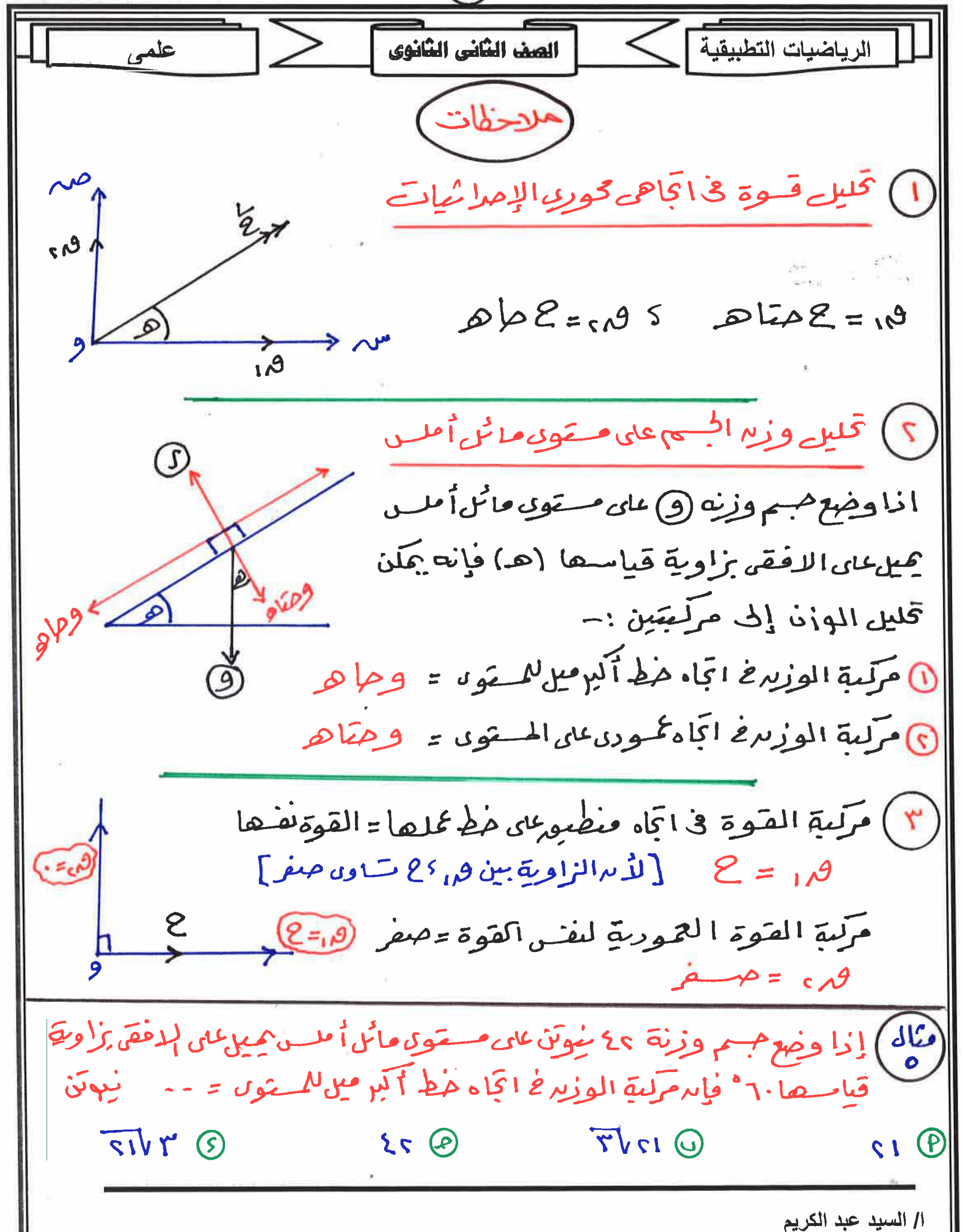
---

(٤) قوة مقدارها ١٠√٢ ث.جم تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإذا كان مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ... ث.جم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٠√٢ (د) ٥√٢

الحل

ا/ السيد عبد الكريم



ملاحظات

① تحليل قوة فى اتجاهى محورى الإحداثيات

ق١ = ع جتا هـ ، ق٢ = ع جا هـ

② تحليل وزن الجسم على مستوى مائل أملس

اذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) فإنه يمكن تحليل الوزن إلى مركبتين :-

① مركبة الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى = و جا هـ

② مركبة الوزن فى اتجاه عمودى على المستوى = و جتا هـ

③ مركبة القوة فى اتجاه منطبق على خط عملها = القوة نفسها

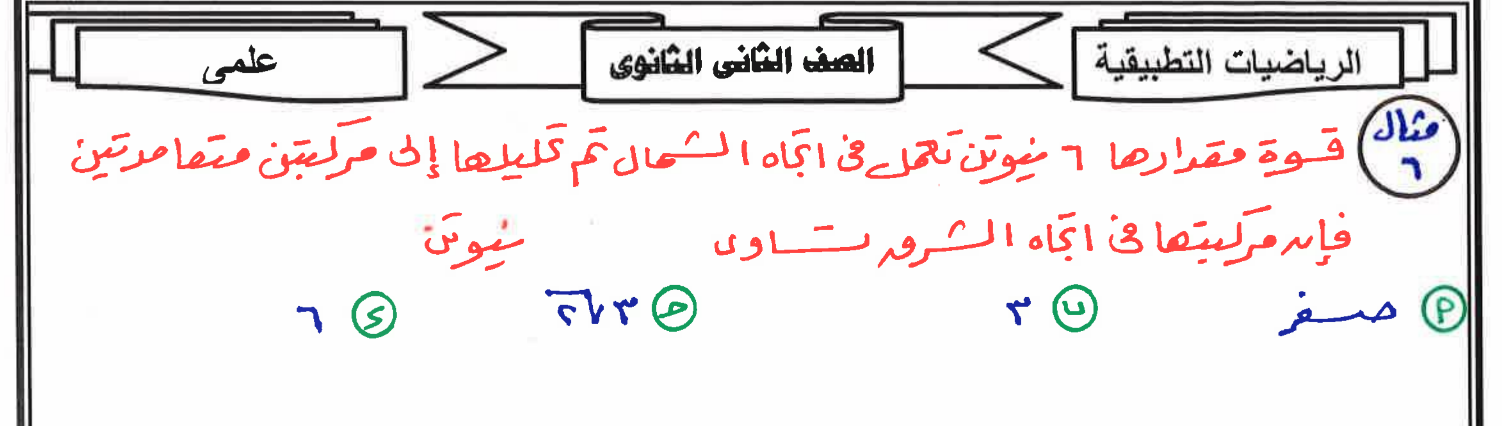
ق١ = ع [لأن الزاوية بين ق١ ، ع تساوى صفر]

مركبة القوة العمودية لنفس القوة = صفر

ق٢ = صفر

مثال ٥ إذا وضع جسم وزنه ٤٢ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٦٠° فإن مركبة الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى = - - نيوتن

(أ) ٢١ (ب) ٢١ $\sqrt{3}$ (جـ) ٤٢ (د) ٢١ $\sqrt{2}$



مثال ٦

قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) $٣\sqrt{٢}$ (د) ٦

مثال ٧

قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن

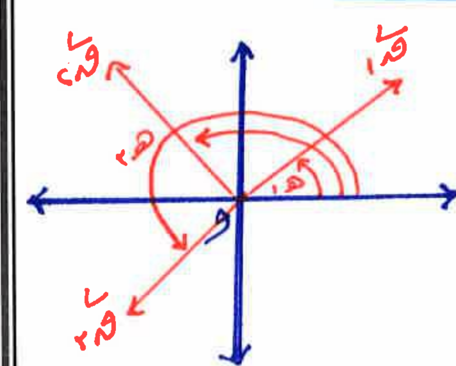
(أ) صفر (ب) $٤\sqrt{٢}$ (ج) ٤ (د) ٦

مثال ٨

مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.جم أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه

الحل

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة



إذا كانت : ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ... مجموعة من القوى المتلاقية

، : هـ١ ، هـ٢ ، هـ٣ ، ... هى الزوايا القطبية لها

فإن : مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور السينات

س = ق١ جتا هـ١ + ق٢ جتا هـ٢ + ق٣ جتا هـ٣ + ...

مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور الصادات

ص = ق١ جا هـ١ + ق٢ جا هـ٢ + ق٣ جا هـ٣ + ...

ح = (س ، ص)

مقدار المحصلة : ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

اتجاه المحصلة : ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

ضع بالك

الزاوية القطبية هى الزاوية التى تصنعها القوة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ملاحظات

١

الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
الإشارة	(+ ، +)	(− ، +)	(− ، −)	(+ ، −)
الزاوية	هـ حادة	١٨٠ − حادة	١٨٠ + حادة	٣٦٠ − حادة

٢ محصلة عدة قوى : ق١ ، ق٢ ، ق٣ هى ح = ق١ + ق٢ + ق٣

وإذا كانت ح = صفر فإن مجموعة القوى تكون متزنة



مثال ١

إذا كانت : ق١ = ٢ س − ٢ ص ، ق٢ = ٤ س − ٨ ص ، محصلتهما ح = أ س − ٣ ب ص فإن أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\frac{1}{3}$ (ج) ٦ $\frac{1}{3}$ (د) ١٢

الحل

مثال ٢

إذا كانت ق١ = ٣ س − ٢ ص ، ق٢ = أ س − ص ، ق٣ = ٤ س − ب ص ، محصلتهم ح = ٦ س − ٤ ص فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (ج) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

الحل

مثال ٣

إذا كان ق١ = ٥ س ، ق٢ = ٧ س − ٥ ص فإن ||ح|| = ... وحدة قوة

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) √٣٧

الحل

مثال ٤

إذا كانت $\overline{ق_1} = ٥\overline{س} + ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = م\overline{س} + ٦\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3} = -١٤\overline{س} + ن\overline{ص}$

ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت $\overline{ح} = (١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi)$

أوجد قيمتى م ، ن

الحل

مثال ٥

فى الشكل المقابل..

إذا كانت محصلة القوى بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص فإن ق = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) ٦

(ج) ١٤ (د) ٢

الحل

مثال ٦ أثرت القوى (٨، ٤، ١٠، ٦√٣) نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاه الشرق، ٦٠° شمال الشرق، ٦٠° شمال الغرب، ٣٠° جنوب الغرب على الترتيب عين المحصلة

الحل

القوى	٨	٤	١٠	٦√٣
الزوايا				

س =

ص =

∴ ح = (−٤، ٤√٣) ربع ثانى

∴ ح =   ظاهـ =   ∴ هـ =

مثال ٧ أربعة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها (٢، ٤، ٦√٣، ٨) نيوتن وكانت الزاوية بين القوة الاولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠° أوجد محصلة القوى مقداراً واتجاهاً

الحل

القوى	٢	٤	٦√٣	٨
الزوايا	٠	٦٠°	١٥٠°	٣٠٠°

س =

ص =

∴ ح = (−١، ٣√٣) ربع ثانى

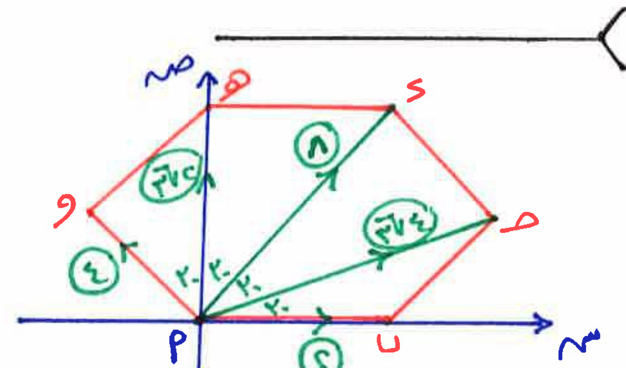
∴ ح =   ظاهـ =   ∴ هـ =



مثال ٨

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٢ ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٤ ث جم فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب عين محصلة القوى

الحل



القوى	٢	٤$\sqrt{٣}$	٨	٢$\sqrt{٣}$	٤
الزوايا	صفر	٣٠	°٦٠	°٩٠	°١٢٠

س =

ص =

∴ ح = (١٠ ، ١٠$\sqrt{٣}$) ربع أول

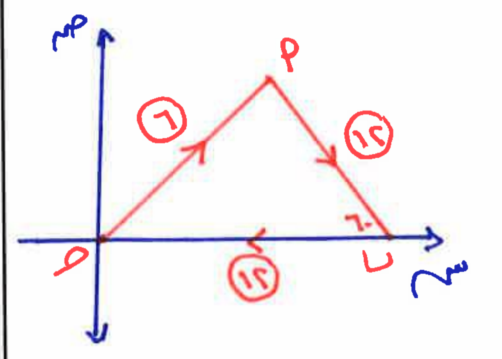
∴ ح =   طاهـ =   ∴ هـ =

مثال ٩

أ ب حـ △ متساوى الأضلاع تؤثر القوى (١٢ ، ١٢ ، ٦) نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ على الترتيب عين محصلة القوى .

الحل

نختار نقطة حـ نقطة تلاقى القوى



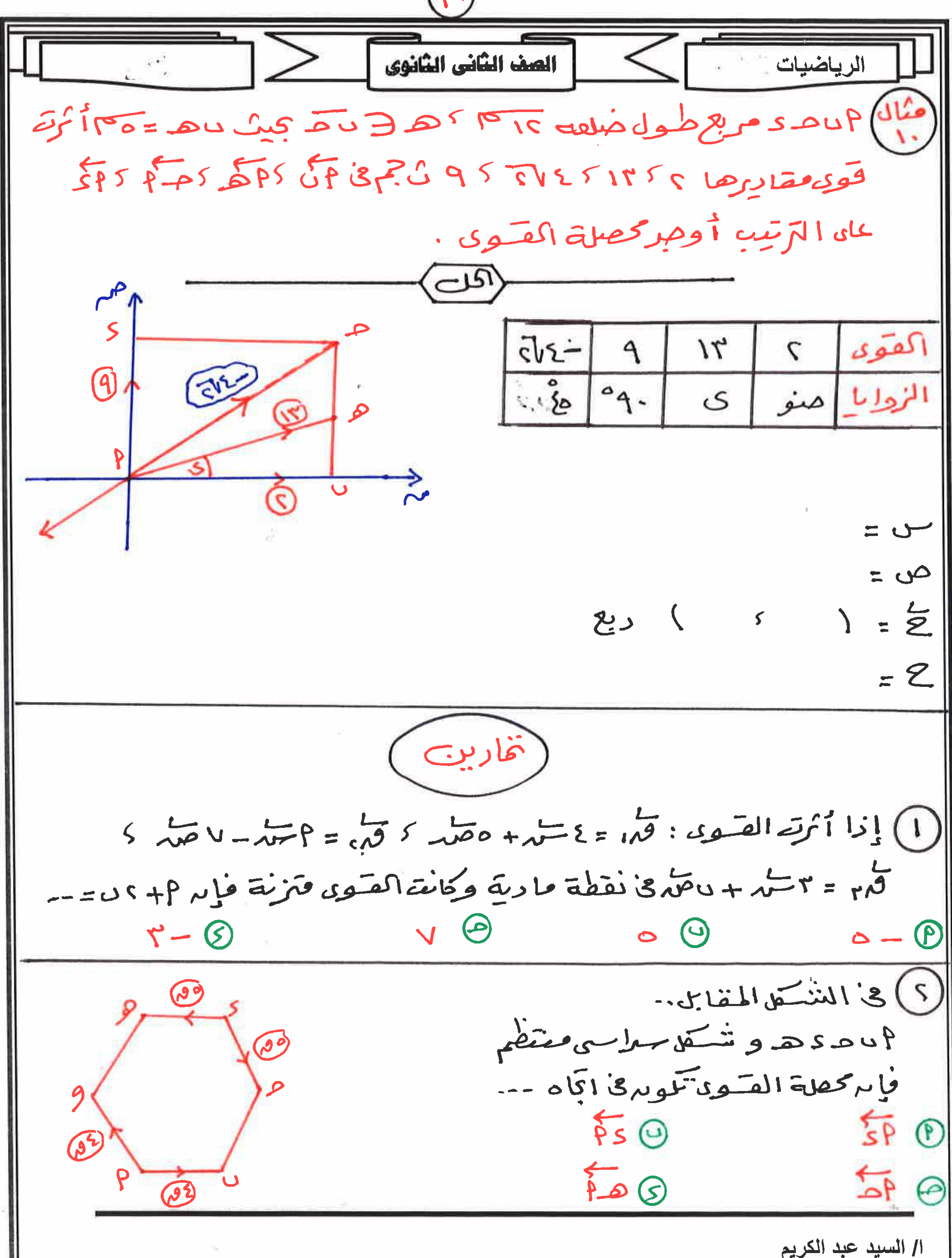
القوى	٦	١٢	١٢
الزوايا	°٦٠	°١٨٠	°٣٠٠

س =

ص =

ح = (-٣ ، -٣$\sqrt{٣}$) ربع ثالث

ح =   طاهـ =   ∴ هـ =



مثال ١٠ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث جم فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ على الترتيب أوجد محصلة القوى .

الحل

القوى	٢	١٣	٩	٤√٢
الزوايا	صفر	ى	٩٠°	٤٥°

س =

ص =

ح = (،   ) ربع

ح =

تمارين

① إذا أثرت القوى : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٤ س + ٥ ص ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ س − ٧ ص ، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٣ س + ب ص فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن أ + ٢ ب = ---

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

② فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم

فإن محصلة القوى تكون فى اتجاه ---

(أ) $\overrightarrow{أد}$ (ب) $\overrightarrow{دأ}$ (جـ) $\overrightarrow{أجـ}$ (د) $\overrightarrow{هـأ}$

ا/ السيد عبد الكريم

توازن القوى المستوية المتلاقية في نقطة

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

* يتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان :-

(١) متساويتين في المقدار (٢) متضادتين في الاتجاه (٣) خطا عملهما على استقامة واحدة

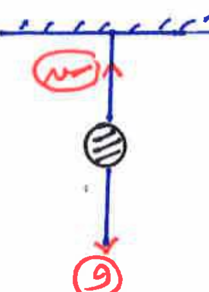
• أي إذا كانت ق١ = − ق٢ ولهما نفس خط العمل فإن الجسم يكون متزن وبالتالي :

ق١ + ق٢ = ٠

ق١ − ق٢ = ٢ ق١

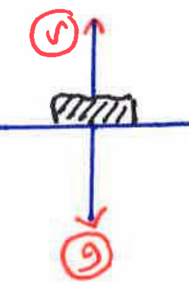
ملاحظات

(١) جسم معلق بحبل



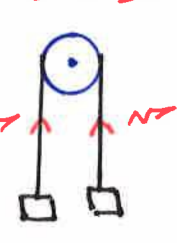
ش = و

(٢) جسم على نضد أفقي أملس



ر = و

(٣) خيط يمر على بكرة ملساء



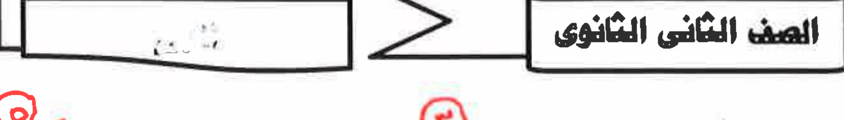
ش = ش

(٤) خيط يمر في حلقة ملساء

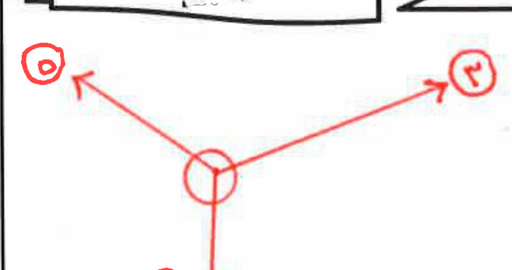
ش = ش

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة

* إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن محصلة أي قوتين منهما تساوي القوة الثالثة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه ولها نفس خط العمل



تدريب في الشكل المقابل ..
القوى (٣، ٥، ٤) نيوتن متزنة
أوجد قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥



الحل

∵ القوى متزنة ∴ محصلة القوتين ٣، ٥ هى القوة ٤

∴ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2$ جتاى

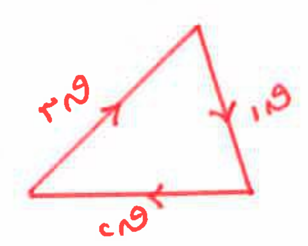
$16 = 9 + 25 + 2 \times 3 \times 5$ جتاى ⟸ ى = ١١ َ ٥٢ ْ ١٢٦

قاعدة ١

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

خد بالك يجب أن تكون مقادير هذه القوى تصلح أطوال أضلاع مثلث

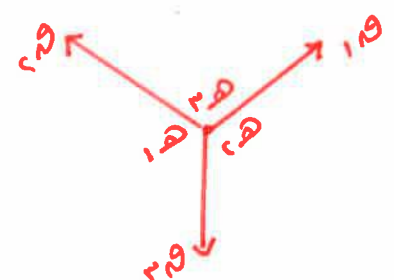
بمعنى : $ق_1 + ق_2 > ق_3$



قاعدة ٢ لامى

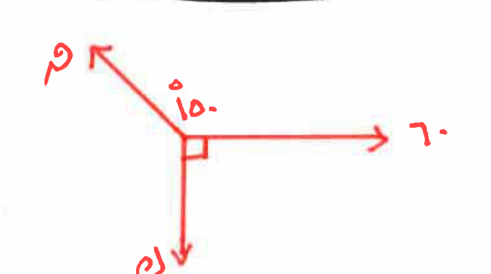
إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

$$\frac{ق_1}{جاهـ_1} = \frac{ق_2}{جاهـ_2} = \frac{ق_3}{جاهـ_3}$$



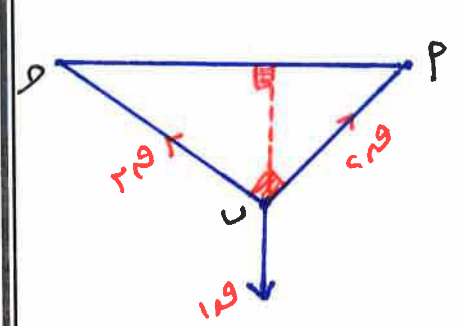


تدريب فى الشكل المقابل..
القوى (٦٠ ، ك ، ق) متزنة
أوجد قيمة ك ، ق



قاعدة مثلث القوى

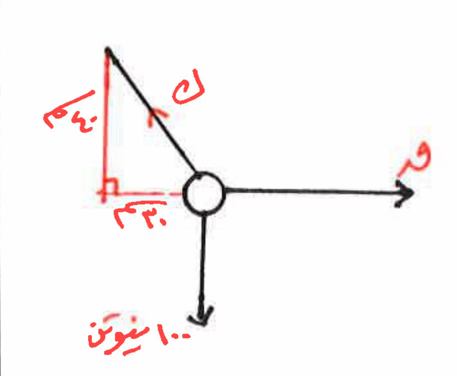
إذا رسم مثلث أطوال أضلاعه توازى خطوط عمل القوى فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة



أى أن :

$$\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{أهـ} = \frac{ق_3}{ب هـ}$$

ملحوظة إذا رسم مثلث أضلاعه عمودية على اتجاهات القوى المتزنة فإن النسبة بين كل قوة وطول ضلع المثلث العمودى عليها تكون متساوية



$$\frac{ق_1}{أهـ} = \frac{ق_2}{ب هـ} = \frac{ق_3}{أب}$$

تدريب فى الشكل المقابل..
القوى (١٠٠ ، ق ، ك) متزنة
أوجد قيمة ك ، ق

اتزان جسم على مستو مائل أملس

(أ) القوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.	(ب) القوة أفقية.	(جـ) القـوة فـى اتجاه يميل بزاوية ى على المستوى لأعلى.	(د) القوة فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية ى لأعلى.
ر ، ق ، و ، هـ	ر ، ق ، و ، هـ	ر ، ق ، ى ، و ، هـ	ر ، ق ، ى ، و ، هـ

١) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين.

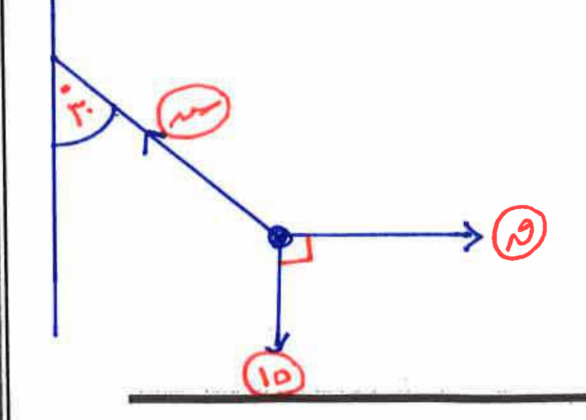
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٢) أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن

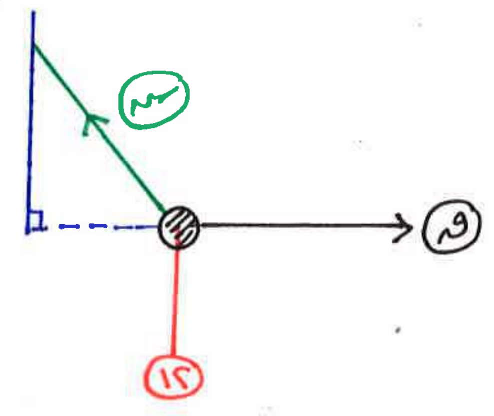
٣) جسم وزنه ١٥ نيوتن معلق فى نهاية خيط مربوط فى حائط راسى. شد الجسم بقوة أفقية فأصبح الخيط يميل على الراسى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة الافقية والشد فى الخيط .





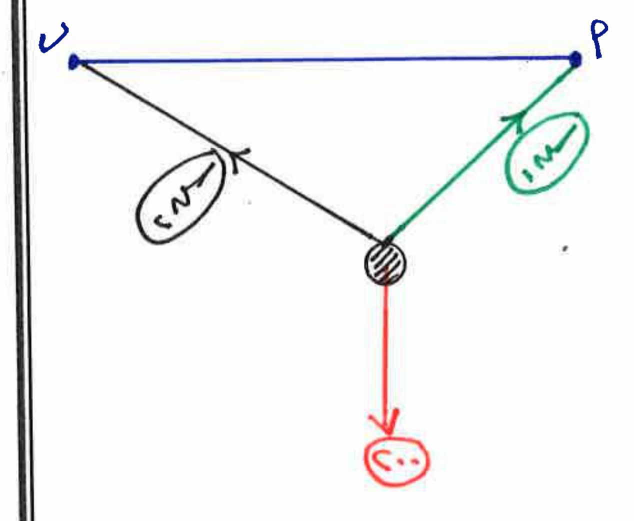
مثال ٤

علق ثقل مقداره ١٢ نيوتن فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسى . جذب الجسم بقوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٥٠ سم من الحائط أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط



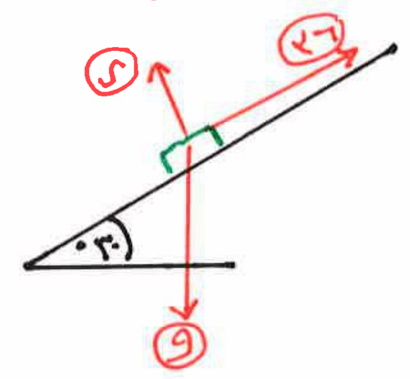
مثال ٥

علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين



مثال ٦

وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط
أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ورد فعل المستوى



مثال ٧

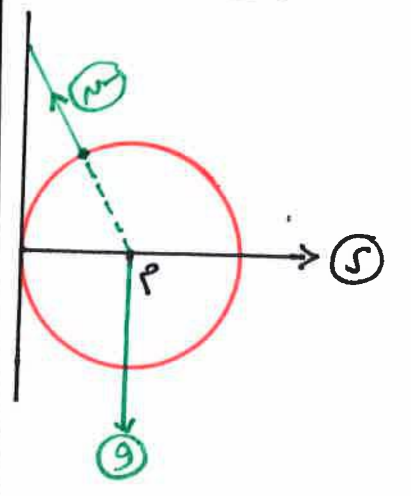
وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها هـ
وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢√٣ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل
للمستوى بزاوية قياسها هـ لأعلى أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى

تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة)

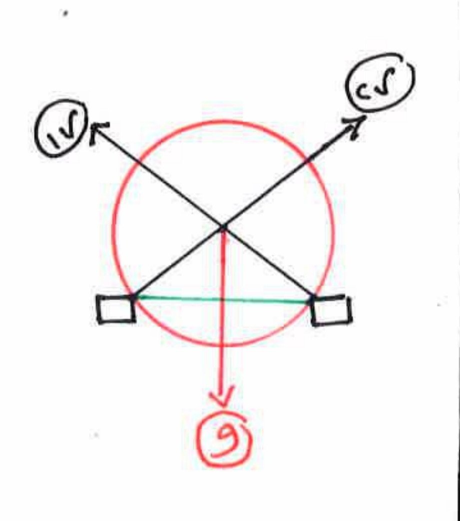
إذا إتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة .

حالات إتزان الكرة

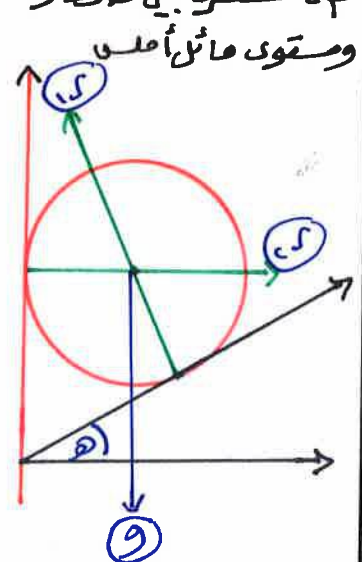
كرة معلقة بخيط على سطحها



كرة مرتكزة على قضيبين متوازيين



كرة مستقرة بين حائط راسى أملس ومستوى مائل أملس



مثال ٨

كرة ملساء طول نصف قطرها ٥ سم ووزنها ٦ نيوتن . ربطت من إحدى نقط سطحها بخيط طوله ٨ سم ومربوط طرفه الآخر من نقطة فى حائط راسى أملس فاتزنت وهى مستندة على الحائط أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط

تمارين

١) ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° أوجد مقدار كل من: ق ، ك

[٣٠ ، ٣٠√٣]

---

٢) علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف مثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسي. أزيح الثقل بقوة في اتجاه عمودي على الخيط حتى أصبح الخيط في وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد في الخيط

[٨ ، ٨√٣]

---

٣) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول يساوي ١٠٠ ث.جم أوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

[٦٠° ، ١٠٠√٣]

---

٤) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقاً حراً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم أوجد مقدار الشد في كل منهما.

[٩٠ ، ١٢٠]

---

٥) كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر في مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد رد فعل المستويين

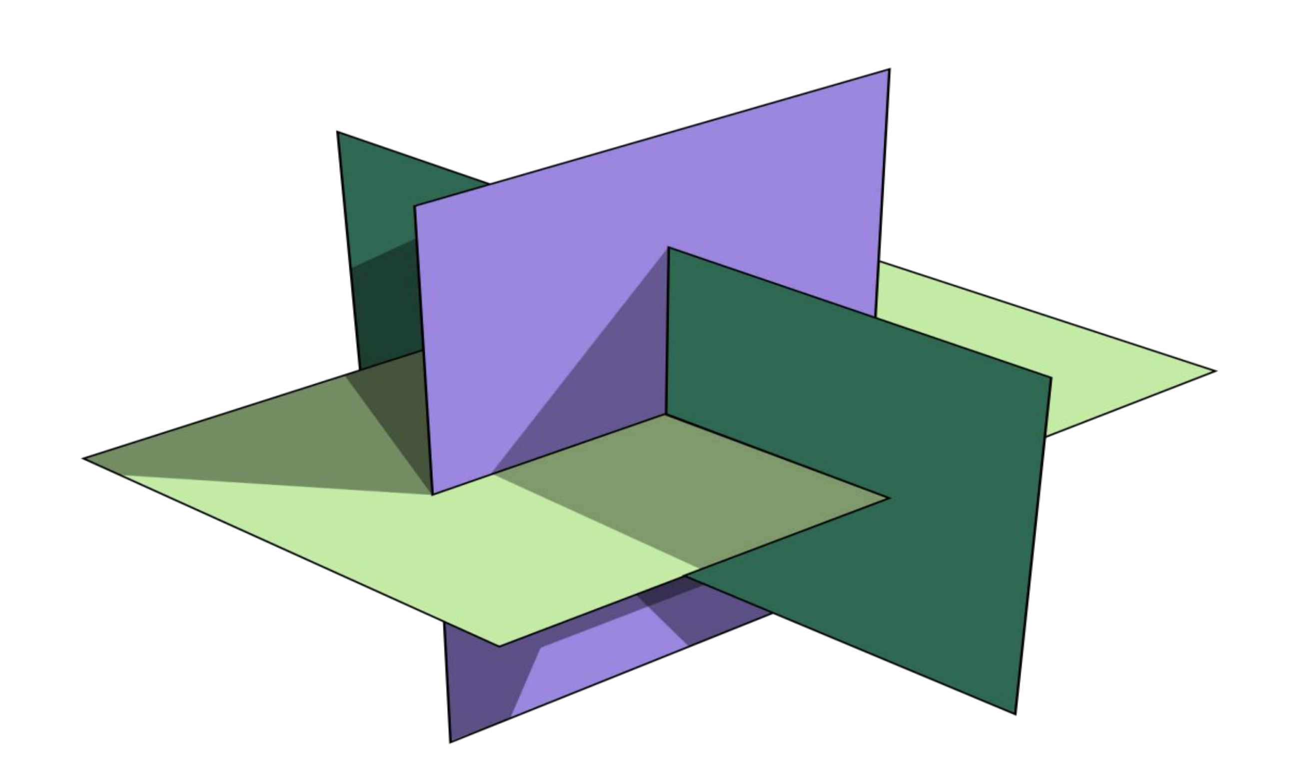
[٤٠٠√٣/٣ ، ٨٠٠√٣/٣]

"إنتهت الاستاتيكا بحمد الله"

"كلنا نخطئ ونصيب"

أ/ السيد عبد الكريم

الهندسة





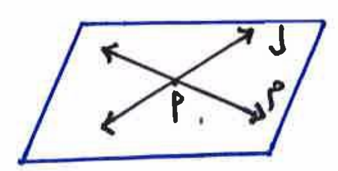
المستقيمات والمستويات فى الفراغ

الخط المستقيم هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديداً تاماً إذا علم نقطتين

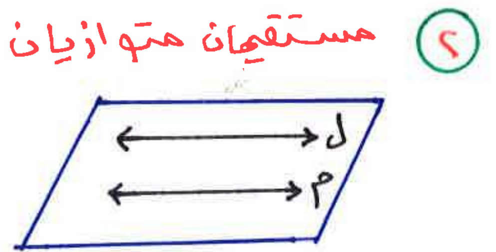
المستوى هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطح لاحدود له وينطبق عليه المستقيم بأى وضع . يرمزله بأحد الحروف الكبيرة س ، ص ، ع ، ...

تعيين المستوى فى الفراغ

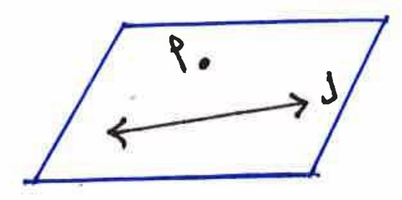
١) مستقيمان متقاطعان



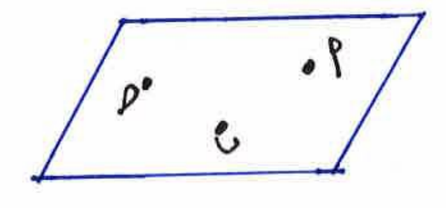
٢) مستقيمان متوازيان



٣) مستقيم ونقطة خارجة



٤) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



ملاحظات

١) أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستقيمات

٢) أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستويات

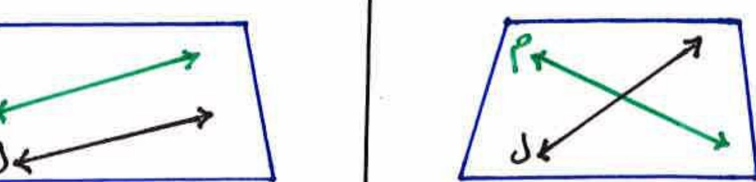
٣) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستقيم واحد فقط

٤) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما عدد لانهائى من المستويات

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ

١ موضع مستقيم بالنسبة لمستقيم في الفراغ

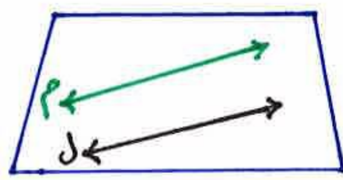
المستقيمان المتقاطعان



$ل \cap م = \{أ\}$

∵ يجمعهما مستوى واحد

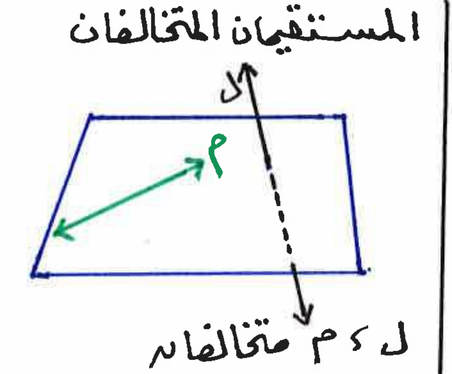
المستقيمان المتوازيان



$ل // م \Leftarrow ل \cap م = \phi$

∵ يجمعهما مستوى واحد

المستقيمان المتخالفان

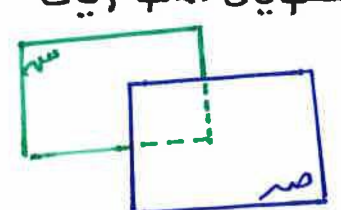


ل ، م متخالفان

لا يجمعهما مستوى واحد

٢ موضع مستوى بالنسبة لمستوى في الفراغ

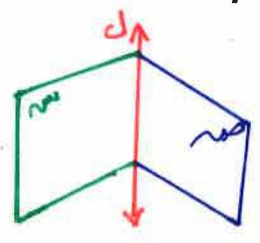
المستويان المتوازيان



المستوى س // المستوى ص

$س \cap ص = \phi$

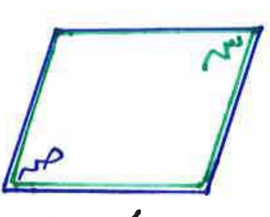
المستويات المتقاطعان



المستويان س ، ص متقاطعان

$س \cap ص = ل$

المستويان المنطبقان

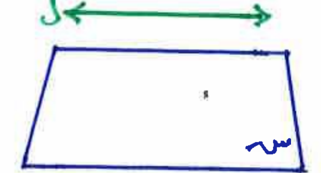


المستويان يشتركان في جميع النقط

$س \cap ص =$ أحدهما

٣ موضع مستقيم بالنسبة لمستوى في الفراغ

المستقيم يوازي المستوى



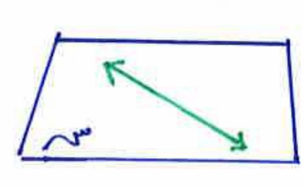
$ل \cap س = \phi$

المستقيم قاطع للمستوى

ل
أ
س

$ل \cap س = \{أ\}$

المستقيم موجود في المستوى



$ل \cap س = ل$

ملاحظات

(١) المستقيمان المتخالفان غير متوازيان / متقاطعان لأنه لا يجمعهما مستوى واحد

(٢) إذا إشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع داخل المستوى

(٣) إذا إشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة

(٤) إذا إشترك مستويان فى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة فإنهما ينطبقان

(٥) المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

(٦) المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية

لاحظ: ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الافقية كلها متوازية

(٦) إذا تقاطعت ثلاث مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون :

متوازية أو متقاطعة جميعاً فى نقطة واحدة

ا/ السيد عبد الكريم

تمارين

(١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س = --

(أ) Φ (ب) ل (ج) س (د) {أ}

(٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س = --

(أ) Φ (ب) ل (ج) س (د) {أ}

(٣) يكون المستويان متخالفان إذا كان --

(أ) غير متوازيان (ب) غير منطبقين (ج) لا يجمعهما مستوى واحد (د) يقعان فى مستوى واحد

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد
(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستوى
(ج) رؤوس المثلث تعين مستوى
(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد

(٥) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى اليه
(ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين
(ج) مستقيمين متقاطعين
(د) مستقيمين متخالفين

(٦) ينطبق المستويان إذا اشتركا فى --

(أ) نقطة واحدة
(ب) نقطتين
(ج) ثلاث نقط على استقامة واحدة
(د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

(٧) اذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان فإن $ل_١ \cap ل_٢$ = --

(أ) Φ (ب) $ل_١$ (ج) $ل_٢$ (د) المستوى الذى يجمع $ل_١$ ، $ل_٢$

الهرم

تعريف: هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك في رأس واحدة ... ويسمى الهرم ثلاثياً أو رباعياً أو ... حسب أضلاع قاعدته

* في الشكل المقابل..

م أ ب حـ ء هرم رباعي

* رأسه: م
* قاعدته: سطح المضلع أ ب حـ ء
* أحرفه الجانبية: $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$
* أوجهه الجانبية: سطوح المثلثات
  م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م أ ء
* ارتفاع الهرم: هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته $\overline{\text{م ن}}$
* الارتفاع الجانبي للهرم: هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته : $\overline{\text{م س}}$

حالات خاصة من الهرم

(١) **الهرم القائم** يكون الهرم قائماً إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي

ملحوظة:
* المركز الهندسي لمتوازي الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تلاقي القطرين
* المركز الهندسي للمثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته

② **الهرم المنتظم** هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه

بمعنى أن : الهرم المنتظم هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

ملحوظة المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس

*** خواص الهرم المنتظم**

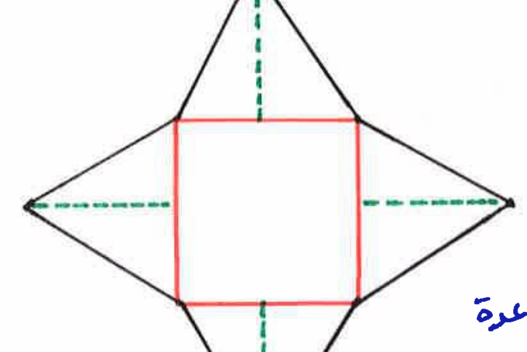
① أحرفه الجانبية متساوية فى الطول

② إرتفاعاته الجانبية متساوية فى الطول

③ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة متساوية الساقين

شبكة الهرم

شبكة الهرم الرباعى المنتظم



عدد أوجهه = ٥ ٤ جانبية + وجه القاعدة

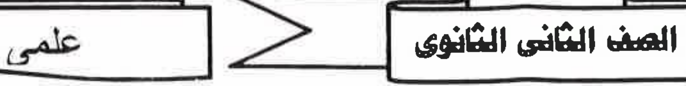
عدد الأحرف = ٨ ٤ جانبية + ٤ قاعدة

عدد الرؤوس = ٥ رأس الهرم + ٤ رؤوس للقاعدة

① المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

② المساحة الكلية للهرم المنتظم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

③ حجم الهرم المنتظم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



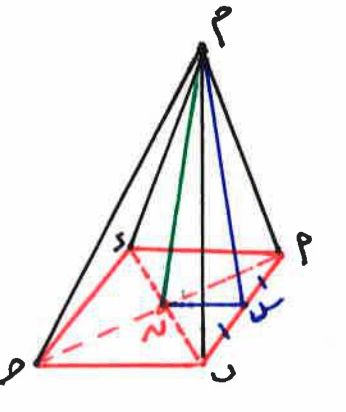
حالة خاصة الهرم الثلاثى منتظم الوجوه الذى طول حرفه = ل ، ع ارتفاعه

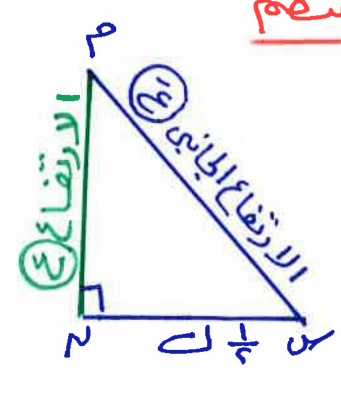
(١) ٢ ل² = ٣ ع²

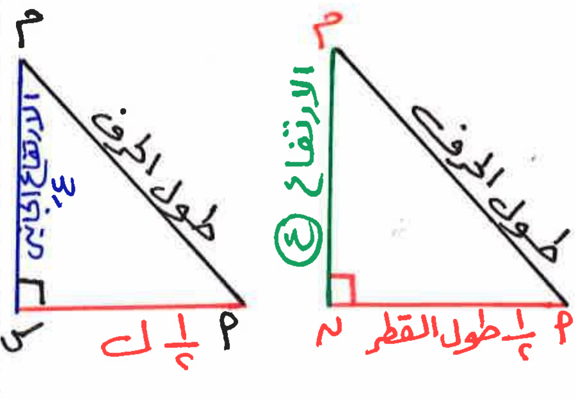
(٢) المساحة الكلية = ل² $\sqrt{3}$

(٣) الحجم = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ل³

ملحوظة الهرم الرباعى المنتظم







* القاعدة : مربع طول ضلعه = ل

(١) طول قطره = ل $\sqrt{2}$

(٢) محيطه = ٤ ل

(٣) مساحته = ل²

ل
ل $\sqrt{2}$
ل
ل
ل

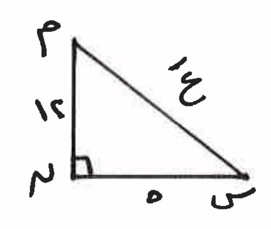
مثال ١ م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

فإن ارتفاعه الجانبى = ...

الحل

(ع١)² = ٢٥ + ١٤٤

∴ ع١ = ١٣ سم



مثال ٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبي ١٥ سم

أوجد: (١) ارتفاع الهرم (٢) المساحة الكلية (٣) حجمه

الحل

م
ع
ع = ط
ن ½ ل = ٩ س

(١) ع = $\sqrt{225 - 81}$ = ١٢ سم

القاعدة مربع

محيط القاعدة: ٤ × ١٨ = ٧٢ سم

مساحة القاعدة: ١٨ × ١٨ = ٣٢٤ سم²

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{1}{2}$ × ٤ل × عَ + ل²

= $\frac{1}{2}$ × ٧٢ × ١٥ + ٣٢٤ = ٨٦٤ سم²

(٣) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

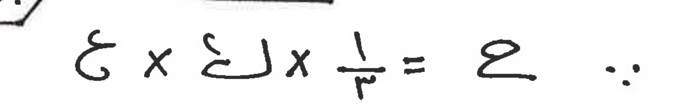
= $\frac{1}{3}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦ سم³

مثال ٣ هرم رباعي منتظم ارتفاعه يساوي ٩ سم وحجمه ٣٠٠ سم³ أوجد طول ضلع قاعدته

الحل

∵ ح = $\frac{1}{3}$ × ل² × ع

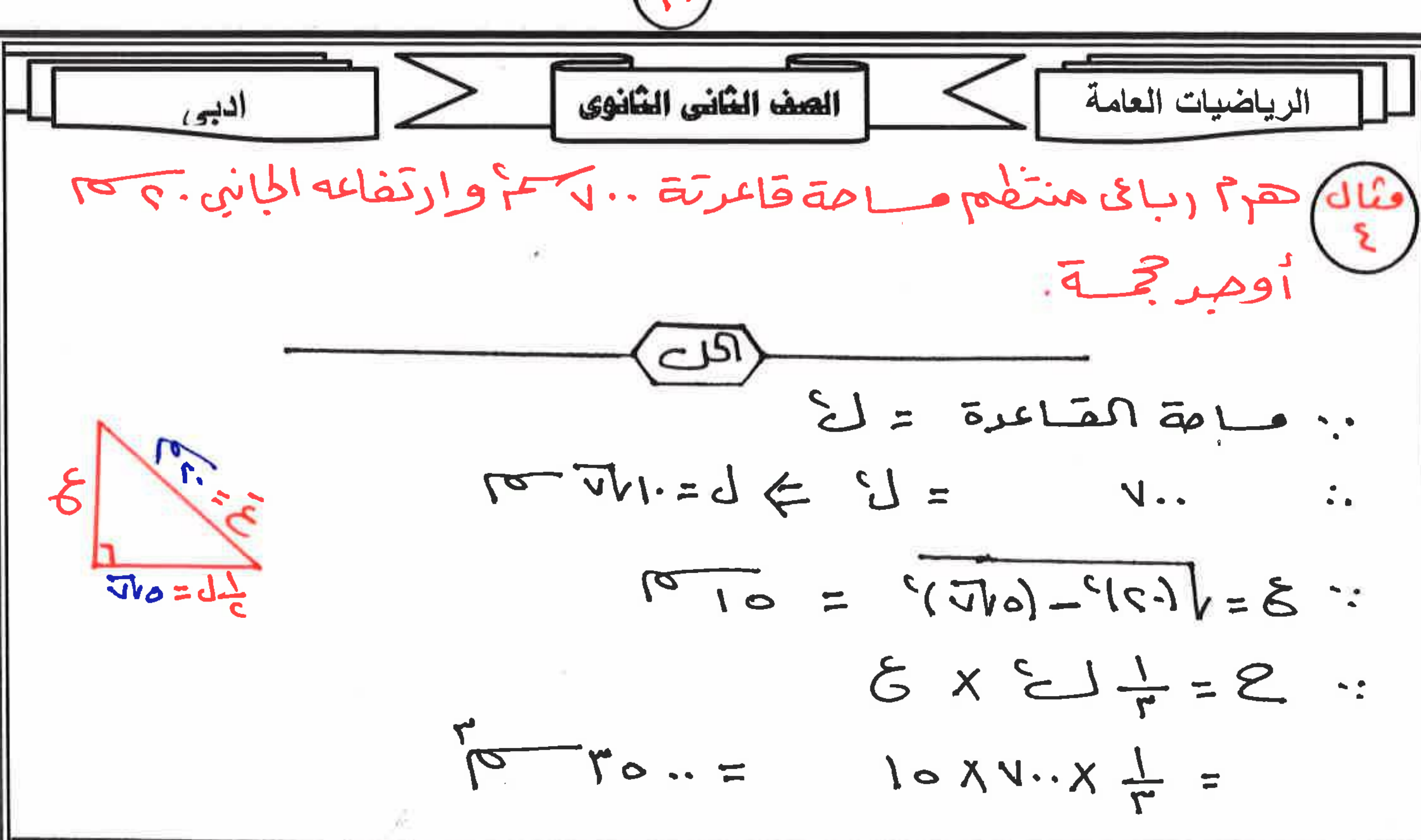
∴ ٣٠٠ = $\frac{1}{3}$ ل² × ٩



∴ ل² = ١٠٠ سم²

∴ ل = ١٠ سم





مثال ٤: هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم
أوجد حجمه.

الحل

∵ مساحة القاعدة = ل²

∴ ٧٠٠ = ل² ⇐ ل = ١٠√٧ سم

∵ ع = $\sqrt{(٢٠)^2 - (٥\sqrt{٧})^2}$ = ١٥ سم

∵ ح = $\frac{١}{٣}$ ل² × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٧٠٠ × ١٥ = ٣٥٠٠ سم³

مثال ٥: هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم أوجد :-

① ارتفاعه ② مساحته الكلية ③ حجمه

الحل

∵ الهرم ثلاثي منتظم الوجوه

∴ ٢ل² = ٣ع²

∴ ٢ × (١٢)² = ٣ع² ⇐ ع = ٤√٦ سم

المساحة الكلية = √٣ ل²

= √٣ × (١٢)² = ١٤٤√٣ سم²

الحجم = $\frac{\sqrt{٣}}{١٢}$ ل³ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٢}$ × (١٢)³ = ١٤٤√٣ سم³

ملحوظة: مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س

= $\frac{ن}{٤}$ × س² × ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$

تمارين

(١) إذا كان حجم هرم رباعي منتظم ١٢ سم٣ وارتفاعه ٤ سم فإن طول حرف قاعدته = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٣ سم فإن حجمه = ... سم٣

(أ) $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 13$ (ب) $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 12$ (جـ) $\frac{1}{3} \times (12)^2 \times 13$ (د) $\frac{1}{3} \times (13)^2 \times 10$

(٣) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه = ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم٢

(أ) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (د) $9\sqrt{3}$

(٤) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية =

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

---

(٥) هرم الجيزة الأكبر (خوفو) هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترًا أوجد ارتفاع الهرم [١٤٠,٤ متر]

(٦) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $10\sqrt{3}$ سم أوجد المساحة الجانبية - حجم الهرم [800 ، $\frac{4000}{3}\sqrt{3}$]

(٧) م أ ب جـ د هرم رباعي قائم قاعدته أ ب جـ د مربع طول ضلعه $8\sqrt{2}$ سم وطول حرفه الجانبي $4\sqrt{6}$ سم أوجد: مساحته الجانبية - حجمه [$128\sqrt{2}$ ، $\frac{512}{3}\sqrt{2}$]

(٨) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي $10\sqrt{3}$ أوجد: المساحة الجانبية - المساحة الكلية [$360\sqrt{3}$ ، $576\sqrt{3}$]

المخروط الدائرى القائم

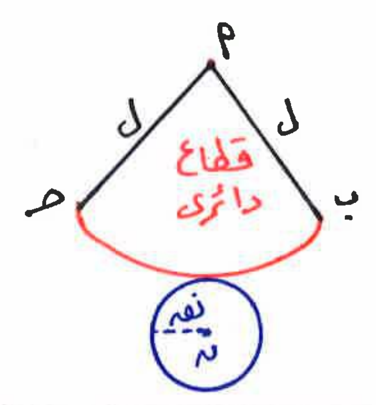
هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور

الارتفاع = ع

نصف قطر القاعدة = نق

راسم المخروط = ل

القاعدة : دائرة { محيطها = ٢ π نق ، مساحتها = π نق^2 }

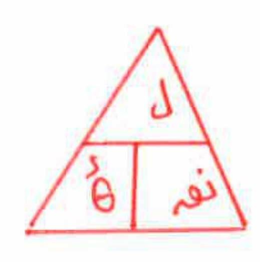


* شبكة المخروط القائم

١) أ ب = أ حـ = ل

٢) قاعدة المخروط : هى سطح الدائرة ن

٣) السطح الجانبي للمخروط : هو القطاع الدائرى أ ب حـ



تذكر أن

١) محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

٢) مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق =

= $\frac{1}{2}$ θ° نق^2

= $\frac{س^{\circ}}{360^{\circ}}$ × مساحة الدائرة

(ل ، نق ، θ°)

١) المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ل = π نق ل



٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

٣) حجمه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال ١: مخروط دائري قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم أوجد حجمه

الحل

نق = $\sqrt{(١٧)^2 - (١٥)^2}$ = ٨ سم

ح = $\frac{1}{3}$ ط نق^2 × ع

= $\frac{1}{3}$ ط × ٦٤ × ١٥ = ٣٢٠ ط سم^3

ل = ١٧
ع = ١٥
نق =

مثال ٢: أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر دائرته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم

الحل

ل^2 = ع^2 + نق^2

∴ ل = $\sqrt{٤٠٠ + ٢٢٥}$ = ٢٥ سم

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{1}{2}$ × ٢ ط × ١٥ × ٢٥ = ٣٧٥ ط سم^2

حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ ط نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ ط × ٢٢٥ × ٢٠ = ١٥٠٠ ط سم^3

مثال ٣: مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٢٥ ط سم^2 وطول راسمه ١٣ سم
أوجد: مساحته الكلية وحجمه.

تمارين

١) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم = ... سم

○ ٦٠ ط ○ ٢٨ ط ○ ١٠ ط ○ ٤٨ ط

٢) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية = ...

○ ٤ ط نق^٢ ○ ٣ ط نق^٢ ○ ٣ ط نق^٢ ○ ٤ ط نق^٢

٣) حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم^٣

○ ٧٧ ○ ١٠٥ ○ ١١٠ ○ ٧٧٠

٤) إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع فإن :

○ ع = $\frac{٢}{٣}$ نق ○ ع = ٢ نق ○ ع = ٢ نق^٢ ○ ع = ٤ نق

٥) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ ط سم^٢ فإن حجمه = ... سم^٣

○ ١٠٥ ط ○ ٩٥ ط ○ ١٠٠ ط ○ ١٢٠ ط

٦) أوجد بدلالة ط محيط ومساحة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم [٢٠ ط ، ١٠٠ ط]

٧) أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ ط سم^٢ وطول راسمه ٣٠ سم [١٤]

٨) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٢ سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) [٨٫٧٥]

أ/ السيد عبد الكريم

الدائـرة

* هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على بعد ثابت من نقطة ثابتة فى المستوى

معادلة الدائـرة

إحداثى المركز م = (د ، هـ) — طول نصف القطر = نق

١) الصورة القياسية : $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

٢) الصورة العامة : $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ح = صفر$

ملاحظات

١) معادلة الدائـرة التى مركزها نقطة الأصل : $س^2 + ص^2 = نق^2$

٢) تتطابق الدائـرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما

٣) موضع النقطة (س١ ، ص١) بالنسبة للدائرة إذا كان :-

$(س_1 - د)^2 + (ص_1 - هـ)^2$

- $= نق^2$ ∴ النقطة تقع على الدائرة
- $> نق^2$ ∴ النقطة خارج الدائرة
- $< نق^2$ ∴ النقطة داخل الدائـرة

٤) مركز الدائرة م = ($\frac{-1}{2}$ معامل س ، $\frac{-1}{2}$ معامل ص) = (−ل ، −ك)

، $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - ح}$

٥) الشروط التى يجب توافرها حتى تكون: $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ح = ٠$ هى :

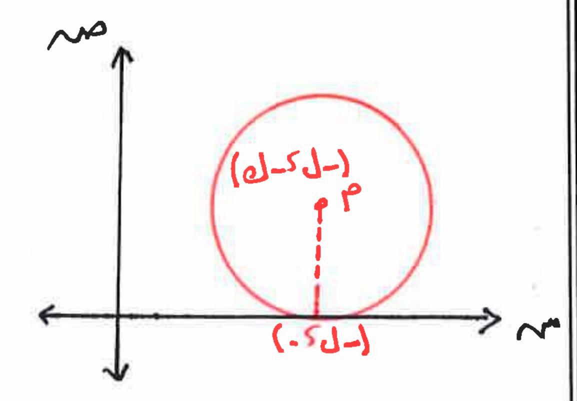
(i) معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

(ii) $ل^٢ + ك^٢ - ح >$ صفر

(iii) لا يوجد حد يحتوى على س ص

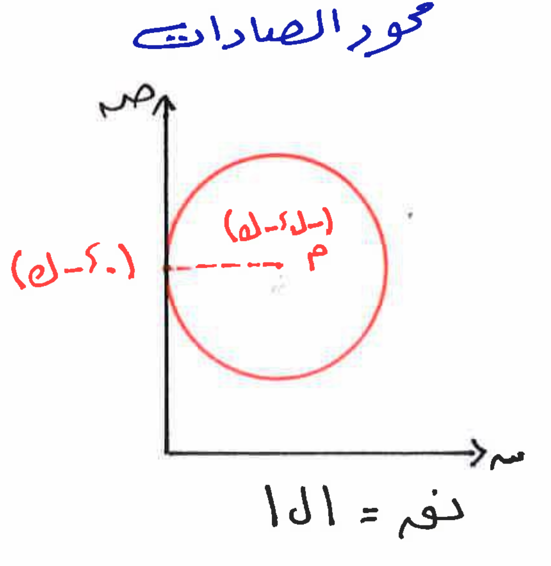
⑥ معادلة الدائرة التى تمس :-

محور السينات



نق = |ك|

محور الصادات



نق = |ل|

⑦ الدائرة التى تمس المحورين يكون نق = |ل| = |ك|

تذكر أن

① النقطة التى ∈ محور السينات (ل،٠)

② النقطة التى ∈ محور الصادات (٠،ك)

③ إحداثى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ $(س_١، ص_١)$، ب $(س_٢، ص_٢)$ = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢}، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

④ البعد بين النقطتين أب = $\sqrt{(س_٢-س_١)^٢ + (ص_٢-ص_١)^٢}$

⑤ أى نقطة ∈ للدائرة تحقق معادلتها



مثال ١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها ٦ وحدات

الحل

مثال ٢ أوجد معادلة الدائرة التي قطرها أب حيث أ(٢ ، -٧) ، ب(٦ ، ٥)

الحل

مثال ٣ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٢) وتمر بالنقطة أ(-١ ، ١)

الحل

مثال ٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٤) وتمس محور السينات

الحل

مثال ٥ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٣، -٤) وتمس محور الصادات

الحل

مثال ٦ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (-٤، ٤) وتمس المحورين .

الحل

مثال ٧ أى المعادلات التالية تمثل دائرة ؟ وإذا كانت دائرة أوجد احداثى مركزها وطول نصف قطرها

(١) ٣س^2 + ٢ص^2 + ٦س - ٨ص - ١٠ = ٠

(٢) س^2 + ص^2 + ٤س + ٢٥ = ٠

(٣) ٢س^2 + ٢ص^2 - ١٢س + ٨ص - ٣٠ = ٠

الحل



تمارين

(١) الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ مركزها النقطة (٠، ٠) وتمر بالنقطة

ⓐ (١، ٢، ٤) ⓑ (٥، ٠) ⓒ (٢٥، ٠) ⓓ (٥، ١)

(٢) معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٣، −٥) وطول نصف قطرها ٧ وحدات هى ..

ⓐ $(س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٤٩$ ⓑ $(س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩$

ⓒ $(س + ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٤٩$ ⓓ $(س − ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩$

(٣) النقطة التى تقع على الدائرة $(س − ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ..

ⓐ (٢، ٣) ⓑ (٣، −٢) ⓒ (٢، ٥) ⓓ (٤، ٣)

(٤) محيط الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٨$ هى ..

ⓐ ٨ π ⓑ ٦٤ π ⓒ ٢ √٢ π ⓓ ٤ √٢ π

(٥) الدائرة $(س + ٢)^٢ + ص^٢ + ٢ ص = ٠$ مركزها النقطة

ⓐ (٢، ٢) ⓑ (−٢، −١) ⓒ (٢، −١) ⓓ (−٢، ٠)

(٦) إذا كانت المعادلة $٢ س^٢ + أ ص^٢ + ب س ص − ٥ = ٠$ تمثل دائرة فإن مساحتها ...

ⓐ ٥ π ⓑ √٥ π ⓒ $\frac{٥}{٢}$ π ⓓ √٢.٥ π

(٧) أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة $س^٢ + ص^٢ − ١٢ س + ١٦ ص + ٢٠ = ٠$ بانتقال (س + ٢، ص − ٢)

(٨) أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢، −٣) وتمس المستقيم الذى معادلته $٣ س − ٤ ص + ٢ = صفر$